

Rozšíření MA1 - domácí úkol 7

Dvojný integrál:

I. Vypočítejte integrály:

1. $\iint_D xy \, dx \, dy$, $D = \{[x, y]; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$
2. $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, $D = \{[x, y]; -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$
3. $\iint_D (x - y) \, dx \, dy$, kde oblast D je ohraničená přímkami $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$

V následujících příkladech změňte pořadí integrace:

1. $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) \, dx$;
2. $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) \, dy$.

II. Aplikace dvojného integrálu:

1. Vypočítejte objem tělesa, ohraničeného rovinami $x = 0, y = 0, z = 0, x = 4, y = 4$
a plochou $z = x^2 + y^2 + 1$.
2. Vypočítejte objem tělesa, ohraničeného rovinami $z = 0, x + y + z = 2$ a plochou $y = x^2$.
3. Zkuste si představit nějaké aplikace integrálu $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$,
kde $D = \{[x, y]; -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$.

III. Pomocí substituce do polárních souřadnic

1. „Ověřte“ vzorec pro výpočet obsahu kruhu o poloměru R .
2. A spočítejte :
 - a) $\iint_K (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, $K = \{[x, y]; x^2 + y^2 \leq R^2\}$ - co by tento integrál mohl „počítat“ ?
 - b) $\iint_D \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy$, $D = \{[x, y]; \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$.
 - c) Vypočítejte hmotnost kruhu o poloměru R , je-li (plošná) hustota přímo úměrná vzdálenosti bodu od středu kruhu.